Inversión y capital en econ. cerrada:

- Ahora hogares pueden transferir recursos a través del tiempo por medio de dos canales:
  1. bonos.
  2. inversión en capital.

- Hasta ahora sólo se podían transferir recursos a través de bonos.
- En econ. con agente representativo, en equilibrio, la cantidad de bonos era igual a cero: $b_t^i = 0$.
- El equilibrio era una sucesión de equilibrios estáticos iguales a los equilibrios de autarquía, donde las tasas de interés eran tales que hogares NO transferían recursos a través del tiempo.
- Ahora, con capital, incluso en econ. de agente representativo, los hogares sí van a poder transferir recursos a través del tiempo.

Capital en la función de producción:

- Capital generalmente se refiere a activos tangibles: máquinas, edificios. Pero también puede ser intangible: capacidad gerencial, marca, etc.
- Denotamos como k_t.
- función de producción: $y_t = A_t F(k_{t-1}, l_t)$

  cantidad de capital que se eligió en $t-1$ para producir en t.

- k_{t-1}: capital escogido en $t-1$ para producir en t.
- A_t: PTF.
- Cobb-Douglas: $y_t = A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$

  α participación del capital en los costos de producción.

$$MPL_t = (1-\alpha) A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{-\alpha} = (1-\alpha) A_t \left(\frac{k_{t-1}}{l_t}\right)^{\alpha} \cdot \frac{l_t}{l_t} = (1-\alpha)\frac{y_t}{l_t}$$

MPL_t es decreciente en l_t y creciente en k_{t-1}.

$\Rightarrow$ la acumulación de k tiene efectos sobre los salarios.

$$MPK_t = \alpha A_t k_{t-1}^{\alpha-1} l_t^{1-\alpha} = \alpha A_t \left(\frac{l_t}{k_{t-1}}\right)^{1-\alpha} \cdot \frac{k_{t-1}}{k_{t-1}} = \alpha \frac{y_t}{k_{t-1}}$$

MPK_t es decreciente en k_{t-1}, y creciente en l_t.

- Cada periodo, el capital se deprecia a una tasa δ.
- Según la literatura, si un periodo es igual a un año, $\delta \approx 0.05 - 0.08$.
- Evolución del capital en el tiempo:

$$k_t = i_t + (1-\delta) k_{t-1} = i_t + k_{t-1} - \delta k_{t-1}$$

i_t: inversión bruta de capital, formación bruta de capital.

$$\underbrace{k_t - k_{t-1}}_{\text{cambio en el stock de capital entre } t-1 \text{ y } t} = \underbrace{i_t - \delta k_{t-1}}_{\text{inversión neta de capital.}}$$

Maximización del bienestar social:

- Más fácil de resolver que el eq. competitivo porque No es necesario encontrar precios de equilibrio.
- Por el primer teorema del bienestar, dado que no hay fallas de mercado (impuestos distorsivos, bienes públicos, externalidades, etc) es equivalente a resolver el eq. competitivo.
- Eq. comp. es un óptimo social.

Problema del planificador central es:

$$\max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left(\ln c_t + \gamma \ln (H - l_t) \right) \quad \text{s.a.}$$

$$c_t + b_t + i_t = A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} + (1+r_{t-1}) b_{t-1}$$

$$k_t = i_t + (1-\delta) k_{t-1} \qquad i_t = k_t - (1-\delta) k_{t-1}$$

$$\Rightarrow c_t + b_t + k_t - (1-\delta) k_{t-1} = A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} + (1+r_{t-1}) b_{t-1}$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\left(\ln c_t + \gamma \ln(H-l_t)\right) + \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t \Big(A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} + (1+r_{t-1}) b_{t-1} - c_t - b_t - k_t + (1-\delta) k_{t-1} \Big)$$

$$= \dots \lambda_t \left(A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} + (1+r_{t-1}) b_{t-1} - c_t - b_t - k_t + (1-\delta) k_{t-1}\right) + \lambda_{t+1}\left(A_{t+1} k_t^{\alpha} l_{t+1}^{1-\alpha} + (1+r_t) b_t - c_{t+1} - b_{t+1} - k_{t+1} + (1-\delta) k_t\right) + \dots$$

$[c_t]$: $\dfrac{\beta^{t-1}}{c_t} = \lambda_t$

$[l_t]$: $\dfrac{\gamma}{H-l_t} = \lambda_t (1-\alpha) A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{-\alpha}$

$[b_t]$: $\lambda_t = (1+r_t)\lambda_{t+1}$

$[k_t]$: $-\lambda_t + \lambda_{t+1}\left(\alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} l_{t+1}^{1-\alpha} + 1-\delta\right) = 0$

Cond. optimalidad:

(1) $\dfrac{c_{t+1}}{c_t} = \beta(1+r_t)$ ← eq. Euler

(2) $\dfrac{\gamma c_t}{H-l_t} = (1-\alpha) A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{-\alpha} \cdot \dfrac{l_t}{l_t} = (1-\alpha)\dfrac{y_t}{l_t}$ ← intratemp.

(3) $1+r_t = \alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} l_{t+1}^{1-\alpha} \cdot \dfrac{k_t}{k_t} + 1-\delta = \alpha \dfrac{y_{t+1}}{k_t} + 1-\delta$

(4) $c_t + i_t = y_t$ ← vaciado de mercado.

Tomemos (2) y (4): $c_t = y_t - i_t$

$$\frac{\gamma(y_t - i_t)}{H-l_t} = (1-\alpha)\frac{y_t}{l_t} \qquad i_t = k_t - (1-\delta) k_{t-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma\left(A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} - k_t + (1-\delta) k_{t-1}\right)}{H-l_t} = \frac{(1-\alpha) A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha}}{l_t}$$

Si conociéramos k_{t-1} y k_t, l_t está implícitamente definida en esta ecuación como función de k_{t-1} y k_t.

$l_t^* = l_t(k_{t-1}, k_t)$

$y_t^* = A_t k_{t-1}^\alpha l_t^{1-\alpha} = A_t k_{t-1}^\alpha l_t(k_{t-1}, k_t)^{1-\alpha} = y_t(k_{t-1}, k_t)$

$c_t^* = y_t^* - i_t^* = y_t(k_{t-1}, k_t) - k_t + (1-\delta)k_{t-1} = c_t(k_{t-1}, k_t)$

Si conociéramos la senda de capital $k_0, k_1, k_2, k_3, \ldots$ podríamos encontrar $l_t^*, y_t^*, c_t^*, \ldots$

Cómo podemos encontrar $k_0, k_1, \ldots$?

utilizando (1) y (3):

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta(1+r_t) \quad , \quad 1+r_t = \frac{\alpha y_t}{k_t} + 1 - \delta$$

$$\Rightarrow \frac{c_{t+1}}{\beta c_t} = \frac{\alpha y_t}{k_t} + 1 - \delta$$

$$\underbrace{\frac{c_{t+1}(k_t, k_{t+1})}{\beta c_t(k_{t-1}, k_t)} = \frac{\alpha y_t(k_{t-1}, k_t)}{k_t} + 1 - \delta}$$

ecuación en diferencias, depende de k_{t-1}, k_t, k_{t+1}

$\Rightarrow$ k_{t+1} está implícitamente definido como función de k_t, k_{t-1}

$k_{t+1}^* = k_{t+1}(k_{t-1}, k_t)$ → eq. en diferencias de grado 2.

Si conociéramos k_0 y k_1 $\Rightarrow$ podemos encontrar k_2.

conociendo k_1 y k_2 $\Rightarrow$ podemos encontrar k_3

$\vdots$

k_0 está dado ✓

k_1 <u>NO</u> lo conocemos. ✗

$s_t :=$ tasa de inversión en la economía.

$$S_t := \frac{i_t(k_{t-1}, k_t)}{y_t(k_{t-1}, k_t)} = S_t(k_{t-1}, k_t)$$

$$C_t + i_t = y_t \Rightarrow C_t = y_t - i_t = y_t - S_t y_t$$

$$\Rightarrow C_t = (1 - S_t) y_t$$

$$\frac{\gamma C_t}{H - l_t} = (1-\alpha)\frac{y_t}{l_t} \Rightarrow \frac{\gamma (1-S_t)\cancel{y_t}}{H - l_t} = (1-\alpha)\frac{\cancel{y_t}}{l_t}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_t(k_{t-1}, k_t) = \frac{(1-\alpha) H_t}{1 - \alpha + \gamma(1 - S_t(k_{t-1}, k_t))}}$$

Estado estacionario:

$$A_1 = A_2 = \ldots = A$$

$$H_1 = H_2 = \ldots = H$$

$$k_0 = k_1 = k_2 = \ldots = k_{ss}$$

$$i_t = k_t - (1-\delta) k_{t-1} = k_{ss} - (1-\delta) k_{ss} = \delta k_{ss}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_{ss} = \delta k_{ss}}$$

$$S_{ss} = \frac{i_{ss}}{y_{ss}} = \delta \frac{k_{ss}}{y_{ss}}$$

En e.e: $C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_{ss}$

$$1 + r_t = \frac{C_{t+1}}{\beta C_t} = \frac{\cancel{C_{ss}}}{\beta \cancel{C_{ss}}} \Rightarrow 1 + r_{ss} = \frac{1}{\beta} = 1 + \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{ss} = \rho}$$

De (3): $$1 + r_t = \alpha \frac{y_{t+1}}{k_t} + 1 - \delta$$

$$\Rightarrow 1 + \rho = \alpha \frac{y_{t+1}}{k_t} + 1 - \delta$$

$$\cancel{1}+\rho = \alpha \frac{y_{ss}}{k_{ss}} + \cancel{1}-\delta \Rightarrow \frac{k_{ss}}{y_{ss}} = \frac{\alpha}{\rho+\delta}$$

$$\boxed{s_{ss} = \frac{\delta\alpha}{\rho+\delta}}$$ tasa de conversión en e.e.

$$l_{ss} = \frac{(1-\alpha)H}{1-\alpha+\gamma(1-s_{ss})}$$

$$\boxed{l_{ss} = \frac{(1-\alpha)H}{1-\alpha+\gamma\left(1-\frac{\alpha\delta}{\rho+\delta}\right)}}$$

$$y_{ss} = A k_{ss}^{\alpha} l_{ss}^{1-\alpha}$$

$$\frac{k_{ss}}{y_{ss}} = \frac{\alpha}{\rho+\delta}$$

$$y_{ss} = \left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}\right) k_{ss}$$

$$\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}\right) k_{ss} = A k_{ss}^{\alpha} l_{ss}^{1-\alpha}$$

$$k_{ss}^{1-\alpha} = \frac{\alpha A}{\rho+\delta} l_{ss}^{1-\alpha}$$

$$k_{ss} = \left(\frac{\alpha A}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} l_{ss}$$

$$\boxed{k_{ss} = \left(\frac{\alpha A}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{(1-\alpha)H}{1-\alpha+\gamma\left(1-\frac{\alpha\delta}{\rho+\delta}\right)}}$$

$$y_{ss} = A k_{ss}^{\alpha} l_{ss}^{1-\alpha} = A\left(\frac{\alpha A}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} l_{ss}$$

$$\boxed{c_{ss} = (1-s_{ss})\, y_{ss}}$$